无理数的无理数次方

1.构造性与非构造性的证明

我们知道，无理数相乘，有可能得到一个有理数。这是因为无理数不满足乘法的封闭性。那么，一个无理数的无理数次方是否可能是一个有理数呢？在讲解构造性证明和非构造性证明的区别时，几乎都会提到这样一个例子：存在两个无理数使得是一个有理数。其证明为：考虑根号的根号次方，它有两种情况，要么是一个有理数，在此种情况下则问题已解决；它要么是一个无理数，那么再考虑，我们仍然得到了一个有理数[1, p.159]。以上方法之所以是非构造性的，是因为虽然我们得出一个形如（是有理数或(是有理数）的结果，我们却没有说出到底具体是A和B中的哪一个成立[1, p.150]。而具体的解答由盖尔范德-施耐德（Gelfond-Schneider）定理给出：如果和是代数数，其中不等于且不等于，且不是有理数，那么一定是超越数。因此我们可以立时得到是一个超越数。因而其平方根也是一个超越数[2]。一个更具体直接的例子是这样的：和都是无理数，可是是一个有理数[2]。构造性证明与非构造性证明的区别是一个很有意思的话题，但它不是本篇的主要目标。

更一般地，我们可以得到：对于任意大于1的整数,都存在个无理数使得（注意，这并不是超级幂运算（tetration），如,这两者的区别是因为幂运算不满足结合律）是一个有理数。其证明如下：

对于的情况，我们已经得证；对于的情况，我们知道当是一个大于等于的整数时，是一个无理数，因而我们只需要令即可。

2. 几乎所有有理数都是无理数的无理数次方

有这样一个有趣味性的问题：是否存在一个无理数 ，使得 的 次方是有理数呢？ Stan Dolan 证明了一个比这更为广泛结论： 区间里的所有并非某个整数的次方的有理数都是某个无理数 的 次方[3]（以下的证明转引自[4]）。

这是因为当 大于 时，函数 是连续单调递增的，因而对于所有 里的有理数 ，一定存在唯一的 ，使得 。反设是一个有理数，设它的不可约分数形式是 。 的情况也就是是某个整数n的n次方的情况。我们作出这个论断，只能等于1。

反设。设 的最简分数形式是 ,则

即可得

因而 整除 。而 和 是互质的， 与 没有公共因数，因而 一定整除 。同理 一定整除 。因而等于 。

由  ，可知和 必有大于的公共因子，设 为其中一个。我们可以将 和 写成如下形式： 和 ，其中 和 都不再有作为其因数 。可以重写为：

因为 等于 ，它们含有相同数量的质因子 ， ， 整除 。但互质，因而 一定是 的约数。而 是 的约数，因而也是 的约数。可是对于 , ,因而 不可能是 的约数，矛盾。

因而我们可以说，几乎所有 里的有理数都是某个无理数的 次方。

参考文献

[1] Timothy Gowers (ed.), The Princeton Companion to Mathematics. New Jersey: Princeton University Press, 2008.

[2] Alexander Bogomolny, Irrational number to an irrational power may be rational, Cut the Knot, <https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/irrat.shtml>.

[3] Stan Dolan, A representation of rational numbers, <http://www.mathteacherctk.com/blog/2012/04/a-representation-of-rational-numbers/>.

[4] Matrix67, 经典证明：几乎所有有理数都是无理数的无理数次方, Matrix67: The Aha Moments, <http://www.matrix67.com/blog/archives/4984>.